Ορισμός: Έστω A είναι ένας πίνακας. Αν ισχύει $a_{i,j}=0$ για $i\neq j$, τότε ο A καλείται διαγώνιος.

π.χ.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&0\\5&4\end{pmatrix} \text{ όχι}$$

Πρόταση: Το άθροισμα κ' γινόμενο διαγωνίων πινάκων είναι επίσης διαγώνιος

Απόδειξη: $A=(a_{i,j})$ κ' $B=(b_{i,j})$ διαγώνιοι πίνακες

$a_{i,j}=0=b_{i,j}$ για $i\neq j$

$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})$ → Αν $i\neq j$ $a_{i,j}+b_{i,j}=0+0$ διαγώνιος

✓ jjj

$AB=C=(c_{i,j})$ — όταν το t ξεπεράσει το i τα άλλα είναι μηδενικά

$c_{i,j}=\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,j}=a_{i,i}b_{i,j}=a_{i,i}\cdot 0=0$

Έστω $i\neq j$

$c_{i,i}=\sum_{t=1}^{n} a_{i,t}b_{t,i}=a_{i,i}b_{i,i}$

π.χ.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\overset{\text{γινόμενο}}{=}\begin{pmatrix}0&0\\0&6\end{pmatrix}$$

— Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να ισχύει, αλλά όχι πάντα

$(AB)^2\neq A^2B^2$

$(AB)^2=(AB)(AB)=((AB)A)B$

$A^2-I=A^2-I^2=(A-I)(A+I)$

ταυτοτικός επί τον εαυτό του → ταυτοτικός

$(A-I)(A+I)=BA+BI$ Θέτω $B=A-I$

$(A-I)A+(A-I)=AA-IA+A-I=A^2-A+A-I=A^2-I$

$A^2 - B^2 \neq (\overbrace{A-B}^{C})(A+B) = CA + CB = (A-B)A + (A-B)B = A^2 - BA + AB - B^2$

π.χ. Να βρεθεί ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ ώστε να ισχύει $A^2+I=O_{2\times2}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\-2ab & -b^2+a^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2-b^2+1=0$

$2ab=0$

Έστω $a=0 \Rightarrow -b^2+1=0 \Rightarrow b^2-1=0$

$\Rightarrow b \begin{cases}1\\-1\end{cases}$

ο πίνακας μου

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Επαλήθευση: $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, ∃ ο πίνακας

αλλά όχι πραγματικός

αριθμός.

Έστω $b=0 \Rightarrow a^2+1=0$ αδύνατο

π.χ. Αν $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ να βρεθεί $B=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ ώστε $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+2z & y+2w\\3x+4z & 3y+4w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$x+2z=1$
$y+2w=0$
$3x+4z=0$
$3y+4w=1$

①
$$\begin{aligned} x + 2z &= 1\\ y + 2w &= 0\\ 3x + 4z &= 0\\ 3y + 4w &= 1 \end{aligned}$$

② $r_3 \to r_3 - 3r_1$, $r_4 \to r_4 - 3r_2$
$$\begin{aligned} x + 2z &= 1\\ y + 2w &= 0\\ -2z &= -3\\ -2w &= 1 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} x + 2z &= 1\\ y + 2w &= 0\\ z &= \tfrac{3}{2}\\ w &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

④ $r_1 \to r_1 - 2r_3$, $r_2 \to r_2 - 2r_4$, $r_3 \to -\frac{1}{2}r_3$, $r_4 \to -\frac{1}{2}r_4$
$$\begin{aligned} x &= 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}\\ y &= 1\\ z &= \tfrac{3}{2}\\ w &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ο B είναι ο αντίστροφος του A. $B = A^{-1}$

Ορισμός: Έστω A τετραγωνικός πίνακας, αν $\exists$ πίνακας B ώστε $AB = BA = I$, τότε ο B θα καλείται αντίστροφος του A. $B = A^{-1}$

$\frac{A}{C}$ δεν ορίζεται, διότι $AC^{-1} \neq C^{-1}A$

Άρα δεν ισχύει η διαίρεση στους πίνακες

Δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο

$GL(n,\mathbb{R})$ γενική γραμμική ομάδα $= \{A \mid$ ο A έχει αντίστροφο$\}$

Πρόταση: Αν ο A κ' ο B έχουν αντίστροφους πίνακες A^{-1} κ' B^{-1}, τότε $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ΟΜΑΔΑ G

προσεταιριστική

$\exists g_0 \in G : g g_0 = g \ \forall g \in G$

$\forall g \in G \ \exists g' : g g' = g_0 = \cancel{g'g}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ πίνακας του συστήματος ή επαυξημένος πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ πίνακας των συντελεστών του συστήματος

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα κάνουμε:

1) αντιμεταθέτουμε τη σειρά των εξισώσεων
2) πολ/με μια γραμμή με έναν αριθμό κ' την προσθέτουμε σε μια άλλη
3) πολ/με μια γραμμή με έναν αριθμό

*

* αυτοί οι μετασχηματισμοί καλούνται στοιχειώδεις γραμμοπράξεις

row → γραμμή r_i η i-γραμμή

ο προηγούμενος πίνακας θα γίνει: ηγετικό στοιχείο (το πρώτο, πάντα)

$$\overset{1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

είναι

Ο πρώτος μη μηδενικός θέλω να έχει συντελεστή 1

Δεν καταλήγεις πάντα στον μοναδιαίο, αλλά θα μοιάζει

Κάνω γραμμοπράξεις για να βρω τον ανηγμένο κλιμακωτό

πχ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ το τελευταίο κομμάτι είναι οι συντελεστές

κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ανηγμένος κλιμακωτός   ανηγμένος κλιμακωτός

Ορισμός: Ένας πίνακας καλείται κλιμακωτός αν:

1) Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε ~~...~~ μη-μηδενικής γραμμής είναι 1 καλείται ηγετικό στοιχείο.
2) Η πρώτη μονάδα σε κάθε μη-μηδενική γραμμή βρίσκεται δεξιά της προηγούμενης
3) Οι μη-μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές

Αν επιπλέον πάνω κ' κάτω από την πρώτη μονάδα είναι μηδενικά, ο πίνακας θα καλείται ανηγμένος κλιμακωτός.

Σκοπός μας είναι χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις να μετασχηματίσουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό. Αυτό θα γίνεται πολ/ντας με κατάλληλους πίνακες οι οποίοι θα ονομάζονται στοιχειώδεις πίνακες.

Στοιχειώδεις πίνακες:

1) $E_{i,j}$ ο πίνακας αυτός αλλάζει την i με την j γραμμή

$$E_{1,2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i-γραμμή j-στήλη

$$E_{i,j} = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{-γραμμή} \\ j\text{-γραμμή} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ 0 & & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ a & b \end{pmatrix}$

$$b_{s,t} = \sum_{k=1}^{n} e_{s,k}a_{k,t}$$

$$s=j \qquad b_{j,t} = \sum_{k=1}^{n} e_{j,k}a_{k,t} = e_{j,i}a_{i,t} = *$$

$E_{i,j} A = (e_{s,t})(a_{s,t}) = (b_{s,t})$

θέλουμε η j-γραμμή του B να είναι η i του A.

$$e_{s,t} = \begin{cases} e_{ii} = 0 \\ e_{ij} = 1 \\ e_{jj} = 0 \\ e_{ji} = 1 \\ e_{tt} = 1 & t \neq i,j \\ e_{ts} = 0 & \text{για } t \neq i \ s \neq j \\ & t \neq j \ s \neq i \end{cases}$$

$=^{*} 1 \cdot a_{i,t} = a_{i,t}$

Μόνο το $e_{j,i} = 1$, τα άλλα είναι 0

$$b_{s,t} = \sum_{k=1}^{n} e_{s,k}a_{k,t} = e_{s,s}a_{s,t} = 1 \cdot a_{s,t} = a_{s,t}$$

$s,t \neq i,j$

ΛΗΜΜΑ: Ο $E_{i,j}$ έχει αντίστροφο κ' ο αντίστροφός του είναι ο εαυτός $E_{i,j}E_{i,j} = I$